NARAVNI ŠTEVILSKI SISTEM

THE NATURAL NUMBER SYSTEM

Anton Berce

Abstrakt

Z enačbo $n!(1-n)! = 1$ lahko razširimo domeno $n!$ na vsa cela števila in tako razširimo tudi številski sistem, ki temelji na $n!$ in vsebuje le cela števila, na številski sistem, v katerem lahko izrazimo ulomke in obenem z razširjeno $n!$ dopolnimo tudi binomske formule.

Abstract

With equation $n!(1-n)! = 1$ we can expand domain of $n!$ on all integers and we also extend a number system based on $n!$ and contains only integers onto number system in which fractions can be expresed and in the same time we complete bynomial formulas by expanded $n!$ also.

MSC: 11A67, 11B65

1. UVOD

Na spletnih straneh Mathpages [1] je opisan "The Factorial Number System", ki nastane, če razčlenitev števil na vsote potenc 2^n ali 10^n zamenja razčlenitev števil na vsote n!. Tako je na primer $37 = 1\cdot 4! + 2\cdot 3! + 0\cdot 2! + 1\cdot 1! = 1201$. Take vsote pa so samo cela števila in zato je prvo vprašanje, ali lahko razširimo sistem tudi na ulomke in realna števila . V binarnem številskem sistemu je decimalni del zapisa števila geometrijska vrsta s členi $2^{-n} = 1/2^n$ in koeficienti 0 ali 1, v eksponentni vrsti $e = \exp(1)$ pa nastopajo členi $1/n!$, ki lahko dobijo pomen fakultete za negativna cela števila. Poleg $(-n)!$ pa je treba določiti še koeficiente v vrsti, se pravi številke, oziroma števke sistema. Binarno velja $2 = 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + ... = 1{,}111111...$, v eksponetni vrsti pa ima te koeficiente število $e-1/1! = 0! + 1/2! + 1/3! + 1/4! ...$ in primerjava poveže $(-1)!$ z 2^{-1} . Ker so logaritmi pri bazi e naravni logaritmi, je skladna oznaka za številski sistem, ki temelji na številu e, *naravni številski sistem*. Med e, vsemi naravnimi števili in fakulteto je jasna zveza: $e = 1/1! + 2/2! + 3/3! + 4/4! ...$. Ne smemo pa pozabiti, da za razliko od $(-n)!$ binomski simboli za $-n$ že obstajajo in zato imenujemo izračune z uporabo $(-n)!$ *relativne binomske formule*.

2. NARAVNI ŠTEVILSKI SISTEM

Z osnovno rekurzivno formulo [2] $(n+1)! = (n+1)n!$ ne moremo definirati (-1)!, saj bi dobili $0! = 0(-1)!$ in tudi gama funkcija ima v negativnih celih številih singularnosti. Za številski sistem takšna (-1)! ni uporabna in zato definiramo fakulteto za negativna cela števila takole:

Definicija. Naravna razširitev $n!$ *je razširitev domene* $n!$ *z enačbo*:

$$n!(1-n)!=1 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{1}$$

Razširjeno fakulteto bomo označili z oklepajem in $(m)!$ naj pomeni, da je lahko m poljubno celo število. Za naravna števila velja $(n)! = n!$ in za negativna cela števila $(-n)! = 1/(n+1)!$. Motivov za definicijo (1) je več in najprej so to podobne lastnosti 2^n in $n!$.

$$2^0=1 \quad 2^{-1}=1/2 \qquad 0!=1 \quad (-1)!=1/2$$

$$2^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \qquad n!=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}k^n$$

$$2^n=1+\sum_{k=0}^{n-1}2^k \qquad n!=1+\sum_{k=0}^{n-1}kk! \tag{2}$$

$$1=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k} \qquad 1=\sum_{k=1}^{\infty}k(-k)! \tag{3}$$

Drugi motiv je, da je $n!$ enaka n-temu odvodu polinoma stopnje n z vodilnim koeficientom 1.

$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^n\ldots+a_0 \qquad f^{(n)}(x)=n!$$

Če je $f^{(-n)}$ n-ti integral funkcije f, potem:

$$x^{(-1)}=\int x dx=\frac{x^2}{2!}+\ldots \quad x^{(-2)}=\int x^{(-1)}dx=\frac{x^3}{3!}+\ldots \quad \ldots \; x^{(-n)}=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\ldots$$

Vodilni člen $x^{(-n)}$ je v točki $x = 1$ skladen z (1) in tudi z absolutno vrednostjo ostanka gama funkcije v $-n$. Tretji motiv pa je to, da lahko zvezo (1) definiramo tudi z rekurzivno formulo.

$$0!=1 \quad (m+1)!=(|m|+1)(m)! \quad \forall m, |m| \in \mathbb{N} \cup 0 \tag{4}$$

$$(-1+1)!=(|-1|+1)(-1)! \qquad (-1)!=1/2!$$
$$(-2+1)!=(|-2|+1)(-2)! \qquad (-2)!=1/3! \;\; \ldots$$
$$(-n+1)!=(|-n|+1)(-n)! \qquad (-n)!=1/(n+1)!$$

V nadaljevanju bomo pokazali, da razširitev (1) zadošča za kompletiranje baze številskega sistema temelječega na $n!$. Ker je $0! = 1! = 1$ uporabimo le 1! in tako dobimo dve zaporedji:

1! = 1 2! = 10 3! = 100 4! = 1000 ...

(-1)! = 0,1 (-2)! = 0,01 (-3)! = 0,001 (-4)! = 0,0001 …

Za zapise števil do 10^{24} potrebujemo v naravnem sistemu več mest kot desetiških mest, za večja števila pa manj, saj $n!$ hitreje narašča kot 10^n in na primer za 10^{100} rabimo le 70 mest. Naslednja naloga je izračun števk, ki bodo zapisane na teh mestih. Očitno mora imeti število 0 vse števke enake 0. Funkcija $(m)!$ preslika vsa cela števila v pozitivna racionalna števila in za vsako pozitivno realno število x obstaja eno in eno samo celo število m, tako da velja:

$$\forall x \in \mathbb{R}, x > 0 \quad \exists m \in \mathbb{Z} \quad (m)! \leq x < (m+1)!$$

$$x = c(m)! + r \qquad c \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{R} \qquad 0 \leq r < (m)! \quad 1 \leq c_m \leq |m| \tag{5}$$

Zaradi tega lahko vsak x razcepimo na vsoto fakultet z Evklidovim algoritmom [3]. Najprej razvrstimo x med $(m)!$ in $(m+1)!$ in ga razcepimo na mnogokratnik $(m)!$ in ostanek r_m . Nato razcepimo ostanek r_m po $(m-1)!$. Če je $r_m <(m-1)!$, potem je $c_{m-1} =0$ in $r_{m-1} = r_m$. Na ta način nadaljujemo razcepe ostankov po monotono padajočem zaporedju fakultet manjših od $(m)!$.

$$\begin{array}{lll} x = c_m(m)! + r_m & 0 \leq r_m < (m)! & 1 \leq c_m \leq |m| \\ r_m = c_{m-1}(m-1)! + r_{m-1} & 0 \leq r_{m-1} < (m-1)! & 0 \leq c_{m-1} \leq |m-1| \\ r_{m-1} = c_{n-2}(m-2)! + r_{m-2} & 0 \leq r_{m-2} < (m-2)! & 0 \leq c_{m-2} \leq |m-2| \\ \ldots & & \\ r_{m-j+1} = c_{m-j}(m-j)! + r_{m-j} & 0 \leq r_{m-j} < (m-j)! & 0 \leq c_{m-j} \leq |m-j| \\ \ldots & & \end{array} \tag{6}$$

Ker so m-j vsa cela števila manjša od m, uvedemo števec $k = (m-j)$ in dobimo vsoto, ki je enaka x, saj so ostanki r_{m-j} strogo manjši od $(m-j)!$ in te limitirajo proti 0 neodvisno od x.

$$x = \sum_{k=-\infty}^{m} c_k (k)! \qquad 0 \leq c_k \leq |k| \tag{7}$$

Koeficienti c_k so števke števila x v naravnem številskem sistemu. Množica števk vsebuje vsa naravna števila, tako da je treba najti način zapisovanja. Ena možnost je, da uporabimo zapis naravnih števil kot je znan iz teorije množic. Druga možnost je, da pišemo števila kot matrike kjer števko c_k določi stolpec in bazno število $k!$ lega v vrstici. Oba načina pa sta nepraktična in je dosti boljše, če zapišemo zaporedje števk c_k z vektorjem desetiških števil. Ker pa sta edini enomestni števili 0 in 1, je na primer števka 2 hkrati tudi število $10 = 1 \cdot 2! + 0 \cdot 1!$, tako da zapisi niso enolični. Števka c_0 je vedno enaka 0 in zato uporabimo člen $0 \cdot 0!$ za decimalno ločilo.

$$x = c_m\, c_{m-1} \ldots c_2 c_1 c_0 c_{-1}\, c_{-2}\, c_{-3\ldots} = c_m\, c_{m-1} \ldots c_2 c_1, c_{-1}\, c_{-2}\, c_{-3\ldots}$$

Poglejmo nekaj primerov zapisov v vektorskem načinu, kjer pa smo opustili odvečne znake.

1 = 0,123456789.10.11.12... e = 10,111111... 2 =10 1/2 = 0,1 3 = 11 1/3 = 0,02

Števke smo ločili s piko le če je bilo nujno in odvečnih ničel nismo zapisali. Ničle so odvečne, če obstaja končno število l in je r_l enak 0, tako da Evklidovega algoritma ni treba nadaljevati.

Zaporedje števk je tako urejena n-terka, $\mathbf{c} = (c_m, c_{m-1}, \ldots, c_l)$, naravnih števil, oziroma 0. Druga n-terka je $\mathbf{b} = ((m)!, (m-1)!, \ldots, (l)!)$ in njun skalarni produkt $s = (\mathbf{c},\mathbf{b})$ je vrednost števila x. Vsi ti skalarni produkti so S_l, podmnožica vsot (7) z izbrano spodnjo mejo l in zgornjo mejo m.

$$s \in S_l \quad s = (\mathbf{c},\mathbf{b}) = \sum_{k=l}^{m} c_k (k)! \quad 0 \le c_k \le |k| \tag{8}$$

Ker so števke nenegativne iz $(\mathbf{c},\mathbf{b}) = 0$ sledi $\mathbf{c} = (0,0,\ldots,0) = 0$. Pokazali bomo, da iz enakosti $(\mathbf{c},\mathbf{b}) = (\mathbf{c}',\mathbf{b})$ sledi $\mathbf{c} = \mathbf{c}'$ in so vrednosti vsot s enolično odvisne od n-terk koeficientov c_k. Če sta vrednosti dveh vsot enaki, potem je njuna razlika 0. Razliko zapišemo kot razliko členov:

$$0 = \sum_{k=l}^{m} c_k^{'}(k)! - \sum_{k=l}^{m} c_k (k)! = \sum_{k=l}^{m} (c_k^{'} - c_k)(k)! = \sum_{k=l}^{m} d_k (k)! \qquad |d_k| \le |k| \tag{9}$$

Če niso vsi d_k enaki 0 morata biti različna od 0 vsaj dva in naj bo k' tak, da je $d_{k'}$ različen od 0 in je $(k')!$ najmanjša. Če enačbo (9) pokrajšamo s $(k')!$, to za pozitiven k' pomeni, da smo jo delili s $k'!$ in za negativen k' pomnožili z $n!$ kjer je $n = |k'| + 1$, v obeh primerih pa tako iz člena $d_{k'}(k')!$ dobimo celo število $d_{k'}$. Tudi iz drugih členov dobimo cela števila, ki pa so zaradi (4) vsa deljiva z n in zato lahko zapišemo njihovo vsoto kot $b = an$, kjer so a, b in n cela števila. Absolutna vrednost $d_{k'}$ je strogo manjša od n in obenem velja $an = - d_{k'}$, tako da mora biti celo število a enako 0 in zato tudi $d_{k'}$, kar pa je v nasprotju s predpostavko, da je $d_{k'}$ različen od 0. To pa pomeni, da je $c'_k - c_k = 0$ za vse k, n-terki sta zato enaki in iz $(\mathbf{c}-\mathbf{c}',\mathbf{b}) = 0$ sledi $\mathbf{c} = \mathbf{c}'$. Vse n-terke nad nekim obsegom so vektorski prostor, toda naravna števila niso obseg in tudi kolobar niso. Vendar pa $\mathbf{c}$ ni n-terka nad $\mathbb{N}$ ampak nad kolobarji ostankov $\mathbb{Z}_n$ $n = |k| + 1$, saj so števke na k-tem mestu manjše ali enake absolutni vrednosti k. Seštejmo dve vsoti iz S_l !

$$s + s' = \sum_{k=l}^{m} c_k (k)! + \sum_{k=l}^{m} c_k^{'}(k)! = \sum_{k=l}^{m} (c_k + c_k^{'})(k)! = \sum_{k=l}^{m'} s_k (k)!$$

Na k-tem mestu smo vsoti števk dodali prenos p_k in če je vsota prevelika dobimo prenos p_{k+1}.

$$(c_k + c_k^{'} + p_k)(k)! = s_k (k)! + p_{k+1}(k+1)! \tag{10}$$

Seštevati začnemo pri $k = l$, kjer je prenos p_l enak 0. Naslednji p_{l+1} je lahko le 0 ali 1, kar pa pomeni, da je tudi p_{l+2} in s tem poljuben p_k lahko le 0 ali pa 1, saj je $c_k + c'_k < 2n - 1$. Enačbo (10) pa lahko po (4) pokrajšamo in fakultet nam ni treba računati, ampak zadostujejo števke.

$$c_k + c_k^{'} + p_k = s_k + p_{k+1} n \qquad 0 \le s_k < n = |k| + 1 \quad p_{k+1} \in \{0,1\}$$

Na k-tem mestu so elementi $\mathbb{Z}_n$, ki jih seštevamo po modulu n in med mesti prenašamo le 1 ali 0. Množici n-terk $\mathbf{c}$ dodajmo elemente $-\mathbf{c}$, $\mathbf{c} + (-\mathbf{c}) = 0$, sprostimo zgornjo mejo m in dobimo aditivno grupo, ki jo označimo s C_l. Aditivna grupa je modul nad kolobarjem celih števil [3] .

Modul C_l je podmodul v $C_{l\text{-}1}$ in veriga se nadaljuje proti neskončnosti. Več o mejah in prehodih med moduli pa nam povesta enačbi (2) in (3). Enačbo (2) dokažemo takole:

$$n! = n(n-1)! = (n-1+1)(n-1)! = (n-1)(n-1)! + (n-1)! \tag{11}$$

Razcep n! na vsoto členov oblike kk! se ustavi pri (1-1)(1-1)! in ostane enačba (2). Če na obeh staneh odštejemo 1, je ta razcep prav algoritem (6) za $x = n!$-1 in dobimo vsoto (8):

$$n! - 1 = \sum_{k=1}^{n-1} kk! \tag{12}$$

To število je zasičeno, na primer 4!-1, v tem pomenu, da rabimo dodatno mesto n!, če mu prištejemo 1, na primer 321+1=1000 in zato modul C_1 oziroma C_0 vsebuje vsa cela števila. V C_1 velja zapis 1 = 1 in v C_0 naj velja 1 = 1,0. Zdaj pa poglejmo vsote za m = 0 in negativen l. Največja vsota po vseh negativnih k je po enačbi (3) enaka 1. To enačbo dokažemo takole:

$$n! = \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{2!} = \frac{n!}{2!} + \frac{2n!}{3!} + \frac{n!}{3!} \tag{13}$$

Ta razcep pa se za razliko od (11) ne ustavi, saj velja za poljubno naravno število k :

$$\frac{n!}{k!} = \frac{(k+1)n!}{(k+1)!} = \frac{kn!}{(k+1)!} + \frac{n!}{(k+1)!}$$

Ko raste k proti neskončno, limitira razcep n! po okrajšanju z n! proti enačbi (3). Če pa razcep ustavimo po n-1 korakih dobimo:

$$n! = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{kn!}{(k+1)!} + \frac{n!}{n!} \tag{14}$$

Ta izraz okrajšamo z n! in na obeh straneh odštejemo 1/n!, tako da dobimo vsoto oblike (8) :

$$1 - \frac{1}{n!} = 1 - (1-n)! = \sum_{k=0}^{n-1} k(-k)! = \sum_{k=-(n-1)}^{0} c_k (k)! \quad c_k = |k| \tag{15}$$

Zdaj pa poglejmo, katera števila reprezentira modul C_l pri poljubnem l. Ker je C_l modul, spodnja meja, ki zadošča za zapis ulomka 1/b, zadošča tudi za vse ulomke a/b. Spodnja meja je število mest in ni odvisna le od velikosti b ampak tudi od deljiteljev števila b. Število mest N ulomka 1/b, določimo z Legendrovo formulo [5]. Tako je N najmanjši n ki izpolni pogoj:

$$\forall p, \varepsilon_p(n) \geq k_p(b) \qquad b = \prod p^{k_p(b)} \qquad n! = \prod p^{\varepsilon_p(n)}$$

$$\varepsilon_p(n) = \frac{n - (c_0 + c_1 + .. + c_i)}{p-1} \qquad n = c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + .. + c_i p^i$$

Za število mest velja $N(1/b) \leq b-1$ in $N(1/p) = p-1$ velja le za praštevila, ki rabijo (p-1) mest, prav toliko kot veliko manjše število 1/p!. Naravni številski sistem tako poleg linearne urejenosti po velikosti odraža tudi delno urejenost po deljivosti celih števil. Če je celo število deljivo z $n!$ je v zapisu n-1 desnih ničel in je element modula C_n. Tudi deljivost poljubno velikega celega števila s praštevilom p je razvidna že iz prvih p-1 mest, saj so za nenegativen k vsi členi $c_{p+k}(p+k)!$ deljivi s p in njihovo vsoto reprezentira element modula C_p.

Modul C_l je definiran za poljubno končno negativno število l in veriga modulov je neomejena, toda ker nimamo števk $c_{-\infty}$ in prenosa $p_{-\infty}$, $C_{-\infty}$ ni modul za vsoto števk. Iracionalna števila so strogo ločena od racionalnih in imajo neskončen zapis, vendar pa včasih poznamo vse števke:

sin(1) = 1/1!-1/3!+1/5!-…= 0,120056009… cos(1) = 1-1/2!+1/4!-… = 0,100450089…

Števke na k-tem mestu so k ali pa 0. Prav tako poznamo vse števke, če se ciklično ponavljajo:

e = 10,1111… cosh(1) =1+1/2!+1/4!+..=1,1010… sinh(1) = 1/1!+1/3!+1/5!+…=1,0101…

Če pogledamo dve števili s cikličnimi števkami, vidimo da od nekega l dalje prenosov med mesti ne more biti več in ostanejo nam vektorske vsote serije enakih n-terk. Periodam dolžine n ustrezajo n dimenzionalni vektorji števk, ki jih lahko seštejemo in recimo števke e so vsota števk cosh(1) in sinh(1). Pri različno dolgih periodah pa z dodatnimi kopijami dopolnimo oba sumanda do vektorja z dimenzijo, ki je najmanjši skupni mnogokratnik obeh dolžin.

Ker so realna števila obseg, obstaja tudi produkt dveh števil in zato povprašajmo ali lahko tudi množimo kar z operacijami med števkami. Množenje potenc 2 je grupa, $2^m 2^n = 2^{m+n}$, ki je izomorfna $\mathbb{Z},+$ in zato množimo le števke, množenje potenc pa nam nadomestijo premiki po decimalnih mestih. Vendar pa ta način v naravnem številskem sistemu odpove, saj je produkt dveh fakultet le izjemoma fakuleta, kot na primer: 6!7! = 10!, 3! 5! = 6!, (n!-1)!n! =(n!)!... .

Na splošno pa loči produkt dveh fakultet $m!n!$ od homorfizma v $\mathbb{Z},+$ binomski koeficient, ki je enak 1 le, če je vsaj en od m ali n enak 0 in imamo trivialen produkt 0!n!, m!0! ali pa 0!0!.

$$m!n! = (m+n)!\binom{m+n}{n}^{-1}$$

Če v ta pogoj vstavimo $m = 1-n$, dobimo:

$$n!(1-n)! = (1)!\binom{1}{n}^{-1} \tag{16}$$

Pogoj za homorfizem v aditivno grupo celih števil je pri deljenjenju izpolnjen tudi za $m = n$:

$$\frac{m!}{n!} = (m-n)!\binom{m}{n}$$

Če v ta pogoj vstavimo m = 1 spet dobimo pogoj (16), ki zahteva, da je binomski koeficient 1 in če bi bilo to res, potem bi iz (16) takoj sledilo (1) . Tako lahko rečemo, da se v naravnem številskem sistemu ne da množiti brez izračunavanja fakultet in je poleg prej naštetih motivov za definicijo (1) motiv tudi to, da lahko definicijo (1) zapišemo tudi kot $n!(1-n)!=(n+1-n)!$.

3. RELATIVNE BINOMSKE FORMULE

Binomski koeficient [4] je definiran za vsako realno število m. Za neko naravno število n pa velja tudi binomska formula, v katero lahko vstavimo naravno razširjeno fakulteto $(m)!$

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2)...(m-k+1)}{k!} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Argumente dajmo v oklepaj tako kot v $(m)!$ in nova formula ustreza (16) in (1) za vsak cel m.

$$\binom{(m)}{(l)} = \frac{(m)!}{(l)!(m-l)!} \qquad \forall m,l \in \mathbb{Z} \tag{17}$$

$$\binom{(1)}{(m)} = \frac{(1)!}{(m)!(1-m)!} = 1$$

Rezultati (17) so razmerja navadnih fakultet pri spremenjenih argumentih in zato predlagamo ime *relativna binomska formula*. Zapišimo $m = (a\text{-}b)$ in $l = (c\text{-}d)$, kjer so a, b, c in d naravna števila, 0 in oklepaj pa opustimo, če nista nujna. Za zrcaljenje preko 0 dobimo rezultate:

$$\binom{(-n)}{k} = \frac{(-n)!}{k!(-n-k)!} = \frac{(n+k+1)!}{k!(n+1)!} = \binom{n+k+1}{k}$$

$$\binom{n}{(-k)} = \frac{n!}{(-k)!(n+k)!} = \frac{n!(k+1)!}{(n+k)!} = (k+1)\binom{n+k}{k}^{-1}$$

Pri zrcaljenju preko 1 m =1-n, ali pa l=1-k, dobimo rezulate:

$$\binom{(1-n)}{k} = \frac{(1-n)!}{k!(1-n-k)!} = \binom{n+k}{k} \qquad \binom{n}{(1-k)} = \binom{n+k}{k}^{-1}(n+k)$$

Rezulati za $m = 2\text{-}n < 0$ so enaki absolutni vrednosti binomskih keoficientov pri -n.

$$\binom{(2-n)}{k} = \frac{(2-n)!}{n!(2-n-k)} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k} = (-1)^k\binom{-n}{k} \tag{18}$$

Ta zveza je enaka kot med (-n)! in ostankom gama funkcije v –n. Oglejmo si širši kontekst te veje formul. V statistiki štejejo takšni koeficienti kombinacije s ponavljanjem reda k med n celicami [2] in spadajo v družino N-nomskih koeficientov, ki jih dobimo s kumulativnimi N členskimi poševnimi vsotami. Kot primer sledijo prve tri binomske in trinomske vsote.

1	1					1	2	1						1	3	3	1					
	1	1					1	2	1						1	3	3	1				
1	**2**	**1**				**1**	**3**	**3**	**1**					**1**	**4**	**6**	**4**	**1**				
1	1	1				1	2	3	2	1				1	3	6	7	6	3	1		
	1	1	1				1	2	3	2	1				1	3	6	7	6	3	1	
		1	1	1				1	2	3	2	1				1	3	6	7	6	3	1
1	**2**	**3**	**2**	**1**		**1**	**3**	**6**	**7**	**6**	**3**	**1**		**1**	**4**	**10**	**16**	**19**	**16**	**10**	**4**	**1**

Vsota ene vrstice N-nomskih koeficientov je N^n in geometrijsko sliko lahko zamenjamo z:

$$\left(1+x+x^2+.....+x^{N-1}\right)^n = \sum \binom{n}{k}_{N-1} x^k$$

Pri x = 1 se vsoti ujemata in iz geometrijske slike vidimo, da velja naslednja formula:

$$\binom{n}{k}_{N-1} = \sum_{j=0}^{N-1} \binom{n-1}{k-j}_{N-1}$$

Kumulativne vsote tečejo po paralelogramu, ki ga razdelimo na dva trikotnika in pravokotnik in na obeh trikotnikih so N-nomski koeficienti enaki relativnim binomskim koeficietnom.

$$\binom{n}{k}_{N-1} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{(2-n)}{k} \quad n \le N, k \le n$$

Število koeficientov pri stopnji n je $(N\text{-}1)n$ +1, tako da za 0<n < N+1 razporedimo koeficiente v trapez z višino n, krajšo stranico N in daljšo $N(N\text{-}1)+1$. In tako se izkaže, da levi zgornji del trapeza vsebuje ista števila kot Pascalov trikotnik do 2^N. Za ilustracijo poglejmo N=10.

1									
1	1								
1	2	1							
1	3	3	1						
1	**4**	**6**	**4**	**1**					
1	5	10	10	**5**	1				
1	**6**	15	20	**15**	6	1			
1	7	**21**	35	**35**	21	7	1		
1	8	28	**56**	**70**	56	28	8	1	
1	9	36	84	**126**	126	84	36	9	1
1	10	46	…	…	…	…	…	…	…

1											
1	1	1	1	**1**	1	1	1	1	1		
1	2	3	**4**	**5**	6	7	8	9	10	9	8
1	3	**6**	10	**15**	21	28	36	…	…	…	…
1	**4**	10	20	**35**	56	84	…				
1	5	15	35	**70**	126	…					
1	**6**	**21**	**56**	**126**	…						
1	7	28	84	…							
1	8	36	…								
1	9	45	…								
1	10	55	…								

Ko gresta n in N proti neskončno od trapeza ostanejo le relativni binomski koeficienti, ki so zasukan binomski trikotnik. Vsota podčrtanih števil 1+5+6+1 =13 je Fibonaccijevo število in takšna števila imajo v trapezu podobno lego kot v trikotniku, tako da so nekakšna os zasuka. Kontekst vseh posledic naravne razširitve $n!$ je prebogat za okvir enega članka. Zato dodajmo le, da ta enostavni korak začenja veliko poti v matematki in njeni uporabi. Predvsem v fiziki.

REFERENCE

[1] Kevin Brown, The Factorial Number system, http://www.mathpages.com/home/kmath165.htm

[2] Rajko Jamnik , Verjetnostni račun, Mladinska knjiga, Ljubljana 1971

[3] Ivan Vidav, Algebra, knjižica Sigma, Ljubljana 1972

[4] Ivan Vidav, Višja matematika I, DZS, Ljubljana 1981

[5] Eric W.Weisstein. "Factorial" From Mathworld – A Wolfram Web Resource
http://mathworld.wolfram.com/Factorial.html